# 17 ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ

Математизация принадлежит к числу первичных видов человеческой деятельности, в которых бурлит глубочайшая человечность, живет стремление к созиданию форм духа и выражается мировая гармония.

Герман ВЕЙЛЬ

Во всех предшествующих случаях мы рассматривали непрерывные математические модели. Функции состояния при этом зависели от одной или нескольких переменных, меняющихся непрерывным образом в некоторой области. Однако на практике часто возникают ситуации, состояние системы меняется дискретно. При этом независимые переменные принимают конечное или счетное множество значений. В первом случае независимая переменная *n* может принимать, например, значения1,2,…,*N*, а функция состояния является вектором **x** = (*x*1,*x*2,…,*xN*). Во втором случае, в качестве значения независимой переменной *n* может выступать, например, любое натуральное число, а функция состояния *x* оказывается при этом некоторой последовательностью {*xn*}. Естественно, здесь может быть не одна, а несколько независимых переменных. В частности, в случае двух дискретных переменных состояние системы будет описываться некоторой матрицей с элементами *aij*. Функций состояния также может быть несколько. В данной главе будут рассмотрены некоторые дискретные модели, относящиеся к различным предметным областям. Следует, отметить, что мы охватываем крайне ограниченный набор дискретных моделей[[1]](#endnote-1).

В Разделе 1 рассматриваются простейшие дискретные модели динамики популяции. Они являются дискретными аналогами рассмотренных в Главе 7 моделей Мальтуса и Ферхюльста и представляют собой некие рекуррентные соотношения. В определенных пределах они сохраняют свойства своих непрерывных аналогов, но при некоторых значениях параметров системы обладают существенно иными свойствами. В Разделе 2 мы рассмотрим дискретную модель переноса тепла в одномерном теле в установившемся режиме. Любопытно, что математической моделью здесь оказывается система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, рассмотренная в Главе 11 при решении уравнения теплопроводности с помощью неявной конечно-разностной схемы.

В отличие от указанных задач, последующие разделы связаны с математическим описанием систем, не имеющих естественных непрерывных аналогов. Они относятся к ***исследованию операций***, представляющей собой раздел прикладной математики, в котором изучаются математические методы принятия оптимальных решений в различных ситуациях[[2]](#endnote-2). В частности, в Разделе 3 рассматривается транспортная задача, состоящая в рациональном распределении продукции с пунктов производства на пункты потребления. В Разделе 4 описывается задача коммивояжера, состоящая в выборе оптимального маршрута прохождения некоторого количества городов. Наконец, в Разделе 5 приводится дилемма заключенного, относящаяся к теории игр. Теоретической основой таких задач служат методы дискретной математики[[3]](#endnote-3).

В Приложении рассматривается одна дискретная модель эпидемиологии, а также приводятся некоторые дополнительные сведения об указанных выше задачах.

###  **ЛЕКЦИЯ**

#### **1. Дискретные модели динамики популяций**

В Главе 7 рассматривались задачи динамики популяций, в которых независимая переменная, т.е. время менялась непрерывным образом. Однако в ряде случаев имеют смысл модели, в которых время меняется дискретно[[4]](#endnote-4). Это в определенной степени связано с тем, что сама по себе популяция представляет собой дискретный объект, т.е. численность видов является целочисленной величиной. Кроме того, переход от поколения к поколению реализуется дискретно. Наконец, наблюдение за развитием системы осуществляется в фиксированные моменты времени, т.е. дискретно.

Рассмотрим простейшую задачу динамики популяций, когда имеется единственный биологический вид. Его состояние характеризуется численностью *xn*в момент времени *n*. Единицу измерения времени можно выбрать таким образом, чтобы *n* принимало значения 0,1,2, и т.д.

Основным параметром системы является прирост вида *k*, характеризующий изменение между числами родившихся и умерших особей за один шаг по времени, приходящееся на одну особь. Тогда *kxn* – изменение численности популяции, состоящей из *xn* особей, за один шаг по времени. Таким образом, приходим к равенству

 *xn+*1 – *xn* = *kxn*, *n =* 0,1, … . (17.1)

Оно дополняется начальным условием

 *x*0 = *a*, (17.2)

где начальная численность *a* известна.

Соотношение (17.1) является ***разностным уравнением*** и представляет собой дискретный аналог дифференциального уравнения  а дополненное начальным условием (17.2), оно оказывается дискретным аналогом соответствующей задачи Коши. Если в непрерывном случае состояние системы описывается функцией *x=x*(*t*), то в дискретном случае мы имеем дело с семейством всевозможных значений {*xn*}, т.е. с ***последовательностью***. Поскольку указанное дифференциальное уравнение соответствует рассмотренной в Главе 7 модели Мальтуса, задачу (17.1), (17.2) можно назвать ***дискретной моделью Мальтуса***.

Подобно своему непрерывному аналогу, рассматриваемая задача допускает явное решение

*xn* = (*k*+1)*xn-*1 = (*k*+1)2*xn-*2 = … = (*k*+1)*nx*0 = (*k*+1)*na.*

Если в непрерывном случае нас интересует поведение функции *x=x*(*t*) при неограниченном возрастании аргумента *t*, то в дискретном случае исследуется поведение последовательности {*xn*} при неограниченном возрастании номера *n*, что соответствует проблеме ***сходимости последовательности***[[5]](#endnote-5).

Очевидно, при *k*>0 значения *xn* неограниченно возрастают, что соответствует неограниченному росту популяции вне зависимости от начального состояния системы. В случае *k*>0 значения *xn* не меняются, т.е. система находится в равновесии. При –1<*k*<0 последовательность {*xn*} имеет своим ***пределом*** число 0, т.е. популяция вымирает. Все эти результаты соответствуют аналогичным свойствам непрерывной модели Мальтуса. Однако при *k*=–1 решение задачи (17.1), (17.2) обращается в нуль за один шаг по времени, а при *k*<–1 оно уже может принимать отрицательные значения, что вообще лишено смысла. Таким образом, дискретная модель Мальтуса имеет смысл исключительно при *k*>–1, а свойства непрерывной и дискретной моделей не в полной степени совпадают. Сравнительный анализ дискретной и непрерывной моделей Мальтуса приводится в Таблице 17.1.

Таблица 17.1 Дискретная и непрерывная модели Мальтуса

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***характеристика*** | **дискретная модель** | **непрерывная модель** |
| *модель* | *xn+*1 – *xn* = *kxn*, *x*0 = *a* |  |
| *независимая переменная* | дискретное время *n* | непрерывное время *t* |
| *функция состояния* | последовательность {*xn*} | *x = x*(*t*) |
| *k* > 0 | неограниченный рост популяции | неограниченный рост популяции |
| *k* = 0 | стационарная последовательность | положение равновесия |
| –1<*k*<0 | сходимость последовательности вымирание популяции | стремление к равновесиювымирание популяции |
| *k*≤–1 | модель неприменима | вымирание популяции |

Как и в непрерывном случае в Главе 7, естественно перейти от модели, допускающей неограниченный рост популяции, к модели, в которой величина *k* является убывающей функцией состояния системы. Тем самым предполагается, что с ростом популяции ее прирост снижается в связи с ограниченностью пищи и других жизненных ресурсов. В результате получается соотношение

*xn+*1 – *xn* = (*ε* –*γxn*)*xn*, *n =* 0,1, …

Здесь параметр *ε* характеризует естественный прирост вида, а *γ* – снижение прироста за счет ограниченности жизненных ресурсов. Полагая *yn*=*γr*-1*xn*, приходим к разностному уравнению

 *yn+*1 = *r*(1–*yn*)*yn*, *n =* 0,1, …, (17.3)

где *r*=1+*ε*. Соотношение (17.3) называется ***дискретным уравнением Ферхюльста*** или ***логистическим уравнением***. Оно пополняется начальным условием типа (17.2).

Установим свойства данной модели. Сходимость последовательности {*yn*}к некоторому пределу *y*, т.е. выход системы в некоторое равновесное состояние, означает, что точка *y* будет решением уравнения алгебраического *y* = *f*(*y*), где *f*(*y*) = *r*(1–*y*)*y*. Это уравнение имеет два решения *y*=0 и *y*=(*r*–1)/*r*. Ввиду неотрицательности численности вида, заключаем, что при *r*<1 возможно лишь тривиальное положение равновесия, соответствующее вымиранию популяции. Этот результат является вполне естественным, поскольку неравенство *r*<1 соответствует отрицательному естественному приросту *ε*, т.е. преобладанию смертности над рождаемостью.

При *r*>1 возможно нетривиальное положение равновесия *y*=(*r*–1)/*r*. Однако возникает вопрос, является ли оно устойчивым, т.е. будет ли сходится к нему последовательность {*yn*}? Очевидно, сходимость будет наблюдаться, если значение |*f* '(*y*)| будет меньше единицы, т.е. функция *f* будет меняться достаточно медленно в окрестности положения равновесия, см. Рис. 17.1.



Рис. 17.1. Последовательность {*yn*} сходится к решению *y*уравнения *y* = *f*(*y*), если |*f* '(*y*)|<1 и расходится, если |*f* '(*y*)|>1.

Находим значение производной *f* '(*y*)=*r*(1–2*y*). Учитывая, что *y*=(*r*–1)/*r*, заключаем, что условие |*f* '(*y*)|<1 будет выполняться при 1<*r*<3. Таким образом, в данном диапазоне изменения параметра *r* определяемая из равенств (17.3) последовательность будет сходится. Это означает стремление численности вида к положению равновесия, при котором имеющихся жизненных ресурсов в точности достаточно для жизнеспособности данной популяции. Такое поведение системы полностью согласуется со свойствами непрерывного уравнения Ферхюльста, см. Глава 7.

Однако при значениях *r*>3 указанное положение равновесия уже не будет устойчивым, вследствие чего поведение системы оказывается не очевидным. Вернемся к рассмотрению равенства *y* = *f*(*y*). Подставляя в его правую часть вместо *y* значение *f*(*y*), получаем *y*=*f*(*f*(*y*)). Таким образом, справедливо равенство ** Полученное алгебраическое уравнение четвертого порядка имеет четыре решения. Можно убедиться, что при значениях 3<*r*<√6 два таких решения оказываются устойчивыми, и значения последовательности {*yn*}, т.е. численность популяции будет бесконечно колебаться между этими значениями. Дальнейшее увеличение параметра *r* приводит к необходимости рассмотрения уравнений *y*=*f*(*f*(*f*(*y*))), *y*=*f*(*f*(*f*(*f*(*y*)))) и т.д. При этом численность популяции будет колебаться вокруг четырех, восьми и т.д. значений. Однако начиная с некоторого значения[[6]](#endnote-6) *r*,колебания уже не происходит, а система демонстрирует хаотическое поведение, при которых малое изменение в начальных условиях приводит к значительным изменениям поведения системы[[7]](#endnote-7).

**Задание 17.1. Дискретная модель Ферхюльста**. Провести расчеты в соответствии с формулой (17.3) для значений *r*, равных 0.5, 2, 3.3, 3.5, 3.8. В качестве начального состояния системы можно выбрать значение 0.5.

***Процессы динамики популяции могут быть описаны разностными уравнениями.
Дискретная модель Мальтуса по своим свойствам аналогична непрерывной модели,
исключая отрицательные значения прироста, когда модель неприменима.
Дискретная модель Ферхюльста при малых значениях прироста
аналогична соответствующей непрерывной модели.
При увеличении прироста происходит удвоение количества положений равновесия,
а затем – и хаотическое поведение системы.***

#### **2. Дискретная модель теплопереноса**

В Главе 13 мы рассматривали стационарный перенос тепла в достаточно длинном и тонком теле при наличии источников тепла. Их действие характеризуется плотностью тепловых источников *F= F*(*x*), где *x* – пространственная координата, направленная вдоль тела. Тогда на некотором участке [*х*,*х*+Δ*х*] выделяется количество тепла



Как и в Главе 13, выбираем направление теплового потока совпадающим с направлением координаты *x*. Тогда изменение количества тепла в выбранной области будет представлять собой разность между тепловым потоком, входящим в точку *х*, и тепловым потоком, выходящим из точки Δ*х*, что соответствует равенству *Q*2 = *q*(*x*) – *q*(*х*+Δ*х*), где *q*(*x*) – тепловой поток, соответствующий в данном случае количеству тепла, проходящего через точку *x*. Мы вновь считаем, что все теплофизические процесс исчерпываются наличием тепловых потоков и действием тепловых источников, что соответствует равенству *Q*1+*Q*2 = 0. Тогда после деления на Δ*х* получаем

  (17.4)

Очевидно, тепловой поток от одной точки к другой прямо пропорционален разности температур и обратно пропорционален расстоянию между точками. Учитывая выбранное направление теплового потока, заключаем, что для вычисления теплового потока в точке *х* требуется рассматривать разность температур в данной точке и некоторой предшествующей точке, например, *х*–Δ*х*. В результате получаем формулу

 **** (17.5)

где *u* – температура тела, а *λ* – коэффициент теплопроводности.

В Главе 13 для вывода математической модели в соотношениях (17.4), (17.5) осуществлялся предельный переход. В результате получалось дифференциальное уравнение относительно неизвестной температуры *u*. Однако можно обойтись и без предельного перехода. Разобьем рассматриваемую область [0,*L*], где *L –* длина тела, на *M* равных частей[[8]](#endnote-8) с шагом *h* = *L*/*М*. Тогда в соотношениях (17.4), (17.5) в качестве *х* можно выбрать значения
*хi* = *ih*, *i* = 1,…,*M–*1.

Введем обозначения

****

Тогда соотношения (17.4), (17.5) принимают вид



Обозначив[[9]](#endnote-9)



приходим к соотношениям

  (17.6)

Равенства (17.6) можно интерпретировать как систему уравнений относительно неизвестных значений *ui*. Очевидно, мы имеем здесь *M–*1уравнение относительно *M+*1 неизвестных *u*0,*u*1,…,*uM*.Два недостающих условия получаются за счет граничных условий. Система разностных уравнений (17.6) с соответствующими граничными условиями составляют ***дискретную модель стационарного теплопереноса***. В отличие от рассмотренных выше дискретных биологических моделей, в данном случае независимая переменная (аргумент) выбирается из конечного множеств, а состояние системы характеризуется вектором с компонентами *ui*.

С такой задачей мы уже сталкивались в Главе 12 при использовании неявной конечно-разностной схемы для решения уравнения теплопроводности[[10]](#endnote-10). Однако в данном случае разностные уравнения (17.6) обладают непосредственным физическим смыслом, будучи основой математической модели рассматриваемого процесса теплопереноса.

**Задание 17.2. Дискретная модель теплопереноса**. Провести расчеты разностных уравнений (17.6) в соответствии с описанным в Главе 12 методом прогонки. В качестве граничных условий задать наличие известного теплового потока на левой границе тела и условие теплоизолированности на его правой границе.

***Процесс стационарного теплопереноса описывается дискретной моделью,
представляющей собой систему разностных уравнений с краевыми условиями.
Для практического нахождения решения задачи
можно воспользоваться методом прогонки.***

#### **3. Транспортная задача**

Качественно иной класс математических моделей связан с транспортной задачей[[11]](#endnote-11). Пусть имеется некоторое количество пунктов производства и пунктов потребления какой-либо продукции. Каждый пункт производства характеризуется своим объемом производства, а каждый пункт потребления – своей потребностью в данной продукции. При этом предполагается, что суммарные объемы производства и потребления совпадают. Стоимость перевозки единицы продукции с каждого пункта производства вкаждый пункт потребления известна. Требуется распределить выпускаемую продукцию всех пунктов производства между пунктами потребления таким образом, чтобы суммарные транспортные расходы были минимальны.

Приведем математическую модель рассматриваемой системы. Обозначим через *m* число пунктов производства, а через *n* – число пунктов потребления. Имеющийся объем производства *i-*ого производителя обозначаем через *ai*, *i =* 1,…,*m*, а необходимый объем потребления *j-*ого потребителя обозначаем через *bj*, *j =* 1,…,*n*. Равенство суммарных объемов производства и потребления соответствует соотношению



Предположим, что *xij* единиц продукции направляется от *i-*ого производителя *j-*ому потребителю. Тогда для того, развести всю продукцию с каждого пункта производства требуется выполнение условия

  (17.7)

Для того, чтобы каждый потребитель получил необходимое количество продукции, необходимо выполнение равенства

  (17.8)

Очевидно, складывая все равенства (17.7) и все равенства (17.8), мы получаем один и тот же результат, что соответствует приведенному выше равенству суммарных объемов производства и потребления.

Стоимость перевозки единицы продукции с *i-*ого пункта производства в *j-*ый пункт потребления обозначим через *cij*. Тогда общие затраты на транспортировку всей продукции будут равны

  (17.9)

Таким образом, задача состоит в отыскании таких значений *xij*, удовлетворяющих условиям (17.7), (17.8), которая доставляет минимум величине *S.* В этом и состоит ***транспортная задача***. В данном случае независимыми переменными номера пунктов производства и потребления с конечным числом значений *i =* 1,…,*m*, *j =* 1,…,*n*, а состояние системы характеризуется всевозможными значениями *xij*, образующими соответствующую ***матрицу*** *X*.

Подобно моделям, рассмотренным в предшествующих разделах, состояние системы здесь характеризуется конечным числом значений, вследствие чего мы относим данную постановку задачи к дискретным моделям. В то же время ее роднит с задачами, рассмотренными в Главе 16, необходимость нахождения экстремума соответствующей величины. Пример решения транспортной задачи приводится в Приложении.

***Транспортная задача состоит в распределении продукции
некоторых пунктов производства между некоторыми пунктами потребления.
Математически мы имеем задачу минимизации
линейной функции нескольких переменных,
связанных некоторым набором линейных равенств.***

#### **4. Задача коммивояжёра**

Обратимся теперь к широко известной задаче коммивояжера[[12]](#endnote-12). Имеется *n* городов. Коммивояжер должен обойти все эти города хотя бы по одному разу и вернуться в исходный город. Требуется выбрать оптимальный маршрут движения. В качестве критерия оптимальности здесь могут выступать пройденное расстояние, стоимость передвижения, время прохождения маршрута и т.п.

В основе математической модели лежит представление системы в виде ***графа***[[13]](#endnote-13), представляющего собой совокупность вершин, т.е. городов *i =* 1,2,…,*n*, которые должен посетить коммивояжёр, и совокупность путей (*i*,*j*) от *i*-ой вершины к *j*-ой. Каждому пути (*i*,*j*), называемому ***ребром графа***, соответствует некоторый критерий выгодности, т.е. вес *cij*, представляющий собой некоторое неотрицательное число. Это может быть расстояние между городами, время прохождения маршрута, стоимость поездки и т.п. Пример графа для задачи коммивояжера представлен на Рис. 17.2. Таким образом, решение задачи коммивояжёра состоит в выборе оптимального маршрута прохождения всех вершин соответствующего графа. Критерием оптимальности здесь является суммарный вес всех путей выбранного маршрута, который необходимо минимизировать.

Если в качестве критерия выгодности выбирается расстояние между городами, то будет выполнено условие *cij* = *cji* для всех значений *i*,*j =* 1,2,…,*n*. В этом случае соответствующий ***граф*** называется ***неориентированным***, а задача коммивояжера – ***симметричной*** (см., например, Рис. 17.2). Однако в ряде случаев имеет смысл и ***асимметричная задача коммивояжера*,** соответствующая ***ориентированному графу***. Это возможно, когда некоторые города связаны дорогами с односторонним движением или когда различаются стоимости прохождения маршрута в прямом и обратном направлении.



Рис. 17.2. Пример графа симметричной задачи коммивояжера.

Имеющиеся критерии выгодности можно охарактеризовать ***матрицей*** с элементами *cij*, которая оказывается симметричной или несимметричной в зависимости от соответствующих свойств рассматриваемой задачи. В частности, для задачи, характеризуемой Рис. 17.2 соответствующая матрица имеет вид:



Чаще всего рассматривается случай, когда маршрут должен проходить через каждый город ровно по одному разу. Соответствующий маршрут на графе называется ***гамильтоновым циклом***. Без ограничения общности можно считать, что каждая из вершин связана со всеми остальными вершинами, что соответствует понятию ***полного графа***. Действительно, если какая-то пара вершин оказывается несвязанной, то в качестве соответствующего критерия выгодности можно искусственно выбрать достаточно большое число. Вследствие этого такой путь наверняка не попадет в состав оптимального маршрута движения коммивояжера. Таким образом, ***задача коммивояжера*** сводится к нахождению гамильтонова цикла полного графа наименьшего веса.

Задаче о коммивояжере можно дать и аналитическую формулировку. При этом состояние системы, т.е. выбираемый маршрут характеризуется матрицей *X* с компонентами *xij*, равными 1, если маршрут включает в себя переход от *i*-ого города к *j-*ому (соответствующее ребро графа), и 0 в противном случае. В этом случае критерием оптимальности маршрута будем сумма



Однако на компоненты матрицы *X* требуется еще наложить ограничения, при которых выбранная система ребер составляет маршрут, соответствующий постановке задачи коммивояжера.

Прежде всего, отметим, что каждый город, лежащий на пути маршрута, посещается единственный раз, т.е. у соответствующей вершины графа должен быть единственное входящее ребро и единственное выходящее ребро. Это соответствует выполнению равенств



Отметим, что при выполнении этих соотношений матрица *X* может не соответствовать маршруту прохождения городов согласно условиям задачи о коммивояжере. В частности, вся система городов может распадаться на несвязанные между собой отдельные циклы, см. Рис. 17.3. Чтобы избежать возникновения циклов, на компоненты матрицы *X* налагаются дополнительные условия в форме неравенств[[14]](#endnote-14).



Рис. 17.3. Граф с циклами, не составляющий маршрут.

Задача коммивояжера имеет и другие интерпретации. Пусть, в частности, имеется станок для обработки *n* различных деталей. Для того, чтобы перенастроить станок с *i-*ой детали на *j*-ую деталь, требуется затратить время *cij*. Задача состоит выборе такой последовательности обработки всех деталей, чтобы минимизировать общее время работы станка. Отметим, что непосредственное время обработки деталей можно здесь не учитывать, поскольку при любой последовательности обработки оно остается неизменным, так как все детали должны быть обработаны. Условию возвращения коммивояжера в первоначальный город в данном случае соответствует требование необходимости возвращения станка в конце работы в исходное состояние для обработки следующей партии деталей.

Задача коммивояжера, в принципе, может быть решена простым перебором всех возможных маршрутов. При этом, находясь в каждом городе, коммивояжер может выбрать любой из городов, который он еще не посетил. Тем самым для прохождения *n* городов в асимметричной задаче коммивояжера существует (*n*–1)! маршрутов, т.е. количество возможных вариантов факториально зависит от числа городов. Это обстоятельство делает практически невозможным решения задачи перебором для достаточно большого числа городов[[15]](#endnote-15). Вследствие этого для решения задачи обычно применяют специальные алгоритмы[[16]](#endnote-16).

***Задача коммивояжера состоит в выборе оптимального маршрута
однократного прохождения некоторого количества пунктов***.
***Задача коммивояжера решается средствами теории графов.***

#### **5. Дилемма заключенного**

В предшествующих двух разделах математические модели системы предполагали выбор одного из возможных вариантов развития событий, исходя из некоторого критерия оптимальности этого выбора. Однако на практике часто возникают ситуации, когда выбор осуществляется двумя или более независимыми сторонами, каждая из которых имеет собственное предпочтение. При этом конкретный вариант развития событий является результатом выбора всех участвующих сторон. Возникающие при этом задачи решаются на основе ***теории игр***[[17]](#endnote-17). Рассмотрим одну достаточно простую игровую задачу, называемую ***дилеммой заключенного***.

Двое преступников были арестованы за совершение сходных мелких преступлений. Полиция подозревает их в совершении более серьезных преступлений, которые, возможно, они совершены вместе. Однако прямых доказательств она не имеет. В этой связи полиция изолировала преступников друг от друга и предложила каждому из них сделку со следствием. Если оба преступника не пойдут сделку, то их осудят на 1 год тюрьмы за совершенное мелкое преступление. Если один из них даст показание против другого, а второй промолчит, то первого освободят в соответствии со сделкой, а второго осудят на 10 лет. Наконец, если оба пойдут на сделку, то им смягчат наказание и осудят на 3 года вместо положенных десяти.

Каждый из преступников не знает, какой выбор сделал другой. Любой из них может рассуждать так. Предположим, что тот второй промолчал. Если я тоже промолчу, то буду осужден на год. А вот если я пойду на сделку, то меня выпустят. Значит, в том случае, когда второй преступник отказался от сделки, мне выгоднее дать показания. Что же будет, если он дал показания против меня? Если я промолчу, меня осудят на 10 лет, а если пойду на сделку, то лишь на 3 года. Следовательно, и том, и в другом случае выгоднее идти на сделку. А поскольку второй преступник рассуждает таким же способом, преступники дают показания друг на друга и получают по три года.

Но возможна и другое поведение преступников. Каждый из них знает, что если они оба промолчат, то получат всего год. Поэтому, возможно, имеет смысл рискнуть в надежде, что и в второй преступник поступит также.

Таким образом, в игровой задаче возможно разная логика действия. В первом случае достигается гарантированно лучший из возможных вариантов вне зависимости от действия другого игрока. Во втором выбирается абсолютно лучший вариант, но он может быть достигнут только в случае соответствующего выбора второго игрока.

Дадим теперь математическую модель рассматриваемой системы. Имеется два игрока, у каждого из которых имеются некоторый набор ***стратегий***, состоящий в нашем случае из двух вариантов выбора. Обозначим через *H*1 и*H*2 множества стратегийпервого и второго игроков. Задаются ***функции полезности*** обоих игроков *S*1 и*S*2, которые ставят в соответствие любой паре стратегий *x*1 и*x*2 игроков, называемой ***ситуацией***, некоторые числа *S*1(*x*1,*x*2) и *S*2(*x*1,*x*2). В частности, в рассмотренном примере стратегия 1 каждого из игроков (преступников) состоит в отказе от сделки со следствием, а стратегия 2 – в их согласии на сделку. При этом справедливы равенства

*S*1(1,1)=1, *S*2(1,1)=1, *S*1(2,2)=3, *S*2(2,2)=3, *S*1(1,2)=10, *S*2(1,2)=0, *S*1(2,1)=0, *S*2(2,1)=10.

Возникает вопрос, какую ситуацию следует считать оптимальной? Как видно из рассмотренного примера, всё зависит от того, что следует понимать под оптимальностью. В первом случае таковой оказалась ситуация (2,2), которая обладает следующими свойствами:

*S*1(2,*i*) ≤ *S*1(1,*i*), *S*2(*i*,2) ≤ *S*2(*i*,2), *i=*1,2.

Здесь каждому из игроков невыгодно менять свою стратегию, если другой игрок свою стратегию не меняет. Такая ситуация называется ***равновесием Нэша***.

Второй вариант поведения преступников соответствует случаю, когда оба они отказываются от сделки. При этом не существует другой ситуации, которая была бы предпочтительнее для обоих игроков одновременно, т.е. такой ситуации (*j*,*k*), чтобы выполнялись неравенства *Si*(*j*,*k*) < *Si*(1,1), *i=*1,2. Эта ситуация называется ***оптимальной по Парето***. Здесь улучшение положения одного из игроков неминуемо сопровождается ухудшением положения другого игрока.

Дилемма заключенного показывает, что вполне естественные понятия равновесия Нэша и оптимальности по Парето могут противоречить друг другу.

Подобно другим классам моделей, рассматриваемая модель может иметь различные практические интерпретации. Пусть, например, имеются две враждующие страны, находящиеся в данный момент в состоянии перемирия. Каждая из стран разрабатывает свою стратегию долгосрочного развития. Она может начать гонку вооружения, а может направить имеющие у нее средства на мирное развитие. Какой выбор сделает другая страна, остается неизвестным. В этой связи каждая страна рассуждает таким образом. Если мой противник вооружается, а мы это не сделаем, тот он на нас нападет и уничтожит. Следовательно, нам необходимо вооружаться. Если же противник не вооружается, и мы поступим так же, то войны не будет. При этом мы поднимем свою экономику, что, безусловно, хорошо. Но если в этом случае мы успеем вооружиться, то со временем сможем напасть на противника и окончательно его разбить, что, явно предпочтительнее. Следовательно, в обоих случаях выгоднее вооружаться. Таким образом, равновесие по Нэшу в данном случае соответствует гонке вооружения. Конечно, более предпочтительным могло бы стать мирное развитие обоих стран, соответствующее оптимальности по Парето. Однако эта ситуация возможна исключительно при правильном выборе стратегий обоих стран одновременно.

Близкий пример. Имеются две враждующих группировки, договорившиеся об обмене пленными. Согласно договоренности, они привозят пленных в некоторое уединенное место, где и осуществляется обмен. Каждая из группировок может либо действовать в соответствии с принятой договоренностью, либо под видом пленных привести вооруженных солдат. Если обе группировки привозят пленных, то производится обмен, что хорошо для обоих сторон. Если обе группировки привозят солдат, то никто не выигрывает, но и ничего не теряет. Если же одна из группировок привозит пленных, а вторая солдат, то солдаты отбивают своих пленных. В результате первая из группировок не освобождает своих пленных и остается без чужих пленных, т.е. заведомо проигрывает. В то же время вторая выигрывает, поскольку освобождает своих пленных, оставляя за собой пленных чужой стороны. Если обе группировки, не доверяя друг другу, стремятся в любом случае не проиграть, то они выбирают равновесие Нэша. Каждая из них привозит на встречу солдат так, что обмен пленными не реализуется. Оптимальность по Парето, при которой осуществляется обмен пленными, выгоден для обоих сторон. Однако эта ситуация не устойчива, поскольку сторона, нарушившая соглашение, получает одностороннее преимущество.

Еще один пример из экономики. Два человека заключили бартерную сделку. Согласно принятой договоренности, они обмениваются сумками, в которых находится упакованный товар, являющийся предметом сделки. Каждый из них может придерживаться договоренности или нарушить сделку, положив в сумку ничего не стоящий груз. Рассуждения каждого вполне естественны. Если тот второй передал мне товар, а я поступлю также, то мы оба получим желаемое, что хорошо. Но если при этом я его обману, то получу еще больший выигрыш. Если же он меня обманул, то я остаюсь ни с чем, и мне выгоднее также его обмануть. По крайней мере, так я ничего не потеряю. Тем самым равновесие Нэша соответствует случаю, когда они оба обманывают друг друга. Оптимальность по Парето, соответствующая реализации сделки, была бы выгоднее для них. Но при этом сохраняется риск отдать товар, не получив ничего взамен.

Еще один экономический пример. Две фирмы выпускают один и тот же товар и могут назначить либо высокие цены, либо низкие. Если обе фирмы назначают низкие цены, то каждая из фирм получает определенную прибыль. Если они обе назначают высокие цены, то получаемая прибыль будет существенно больше. Однако если одна фирма назначает высокие цены, а вторая – низкие, то у первой фирмы товары вообще не раскупаются, а вторая получает максимальную прибыль, реализовав все свои товары. Равновесию по Нэшу здесь соответствует назначаемые обеими фирмы низкие цены, при которых каждая из них получает гарантированную прибыль вне зависимости от действий конкурента. Однако фирмы могут пойти на картельный сговор, назначив высокие цены, что соответствует оптимальности по Нэшу. Однако при этом сохраняется риск, что другая фирма, снизив цены, разорит конкурента.

Сравнительная характеристика различных интерпретаций дилеммы заключенного приводится в Таблице 17.2.

Таблица 17.2. Интерпретации дилеммы заключенного.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **игроки** | **игра**  | **равновесие Нэша** | **оптимальность по Парето** |
| заключенные | сделка со следствием | согласие на сделку | отказ от дачи показаний |
| враждующие страны | стратегия развития | гонка вооружений | мирное развитие |
| враждующие группировки | обмен пленными | нарушение договоренности | выполнение обмена |
| коммерсанты | бартерная сделка | нарушение соглашения | выполнение соглашения |
| конкурирующиефирмы | назначение цены | низкие цены | картельный сговор |

Общие определения равновесия Нэша и оптимальности по Парето приводятся в Приложении.

**Задание 17.3. Конкуренция двух фирм с тремя вариантами цен**. Имеются две фирмы, выпускающие один и тот же товар. Каждая из фирм независимо друг от друга может назначить низкие, средние и высокие цены, которые соответствуют значениям 1, 2 и 3 стоимости единицы продукции. Спрос на товар тем выше, чем ниже уровень цен. В частности, если обе фирмы назначают низкие цены, то каждая из них продаст по 12 единиц продукции, если средних, то по 8, а если высокие – то по 6. Если одна фирма назначает низкие цены, а другая – средние, то первая продаст 17 единиц продукции, а вторая – 5. Если одна фирма назначает средние цены, а другая – высокие, то первая продаст 9 единиц продукции, а вторая – четыре. Если же одна фирма назначает низкие цены, а другая – высокие, то первая продает 20 единиц продукции, а вторая – ничего. Дать математическое описание данной системы, а также найти равновесие Нэша и ситуацию, оптимальную по Парето.

**Направление дальнейшей работы**. В предшествующих главах мы рассмотрели различные детерминированные математические модели. Однако возможны системы, состояние которых зависит от некоторых случайных факторов. Такие задачи являются предметом следующей главы.

### **ПРИЛОЖЕНИЕ**

Ниже развиваются идеи, описанные выше в лекции. Как уже отмечалось в Главе 7, математические модели эпидемиологии можно рассматривать как развитие моделей динамики популяций. В этой связи рассматриваемую ниже дискретная модель развития эпидемии служит продолжением рассмотренных в Разделе 1 дискретных моделей динамики популяций. Затем на частном примере описывается решение транспортной задачи, поставленной в Разделе 3. К транспортной задаче примыкает и модель планирования производства, также относящая к линейному программированию. Наконец, в заключительном разделе даются некоторые положения теории игр, связанные с описанной в Разделе 5 дилеммой заключенного.

#### **1. Дискретная модель развития эпидемии**

В Главе 7 рассматривалась математическая модель развития эпидемии. При всё население разбивалось на группы в зависимости от состояния людей по отношению к данной болезни. Мы рассмотрим здесь другую модель этого явления. Ее отличительной особенностью, предопределившей выбор именно дискретной, а не непрерывной модели является следующее обстоятельство. Любой заболевший человек через определенное время, значительно меньшее по сравнению с временем, на котором исследуется процесс, обязательно либо выздоровеет, либо умрет. В любом случае через какое-то время он наверняка покидает группу больных, перейдя в другую группу. Аналогично любой человек, бывший в контакте в больным, через какое-то (явно не очень большое) количество дней либо заболеет, либо уже не заболеет. Тем самым он гарантированно покинет группу контактных. В этой связи представляется естественным измерять время дискретно, непосредственно заложив в модель время нахождения человека в той или иной группе.

В данном случае всё население разбивается на следующие группы:

*S*: восприимчивые (здоровые, но потенциально больные);

*E*: контактные (здоровые, бывшие в контакте с больными);

*A*: бессимптомные (зараженные, с бессимптомным течением болезни);

*I*: легко больные (больные в легкой форме, проходящие лечение на дому);

*H*: госпитализированные (тяжело больные, находящиеся на госпитализации);

*C*: критические (больные в критическом состоянии);

*R*: выздоровевшие (переболевшие, у которых нет никаких признаков болезни);

*D*: умершие.

Предполагается, что восприимчивый человек заражается, проходя через стадию нахождения в группе контактных. При этом источниками заражения являются только бессимптомные (в большей степени) и легко больные (в меньшей степени), поскольку госпитализированные больные находятся под контролем и в существенно меньшей степени могут оказаться источниками заражения. Предполагается также, что все выздоровевшие иммунизированы, т.е. не являются восприимчивыми к болезни.

При построении модели учитываются следующие межгрупповые переходы, см. Рис. 17.4:

* *es*: контактный может не заболеть и снова стать восприимчивым,
* *ea*: контактный может стать бессимптомно больным,
* *ei*: контактный может стать легко больным,
* *eh*: контактный может стать госпитализирован,
* *ar*: бессимптомный может стать выздоровевшим,
* *ae*: бессимптомный может стать легко больным,
* *ih*: легко больной может быть госпитализирован,
* *ic*: легко больной может стать критическим,
* *ir*: легко больной может стать выздоровевшим,
* *hc*: госпитализированный может стать критическим,
* *hr*: госпитализированный может выздороветь,
* *cr*: критический может выздороветь,
* *cd*: критический может умереть,
* *se*: восприимчивый может стать контактным.



Рис. 17.4. Связь между группами населения в модели развития эпидемии.

При этом через *Sk*, *Ek* и т.д. обозначается, соответственно, численность восприимчивых, контактных и т.д. людей на *k*-ый день с момента начала исследования. Популяция считается изолированной. Естественная рождаемость и смертность населения здесь не учитывается. Тем самым суммарная численность *N* всех групп населения считается постоянной. Через *δes*,*δea* и т.д. будут обозначены доли контактных (*e*), переходящих со временем в группы восприимчивых (*s*), бессимптомных больных (*a*) и т.д. Все эти величины лежат между нулем и единицей, причем выполнены очевидные равенства *δes*+*δea*+*δei*+*δeh*=1 и т.п., т.е. любой контактный либо вообще не заболеет, либо заболеет в той или иной форме.

Как уже отмечалось, особенностью данной модели, предопределившей ее дискретную структуру, предположение об ограниченности нахождения любого человека в группах контактных и любой формы больных. В дальнейшем через *ne*, *na*и т.д. обозначается число дней нахождения в группе контактных (*e*), бессимптомных (*a*) и т.д., а через ,  и т.п. – число контактных *j-*огодня со времени контакта, число бессимптомных *j-*огодня со времени начала болезни и т.д. в момент времени *k*. При этом справедливы очевидные следующие равенства

      (17.10)

Контактный *j*-ого дня в предыдущий момент времени становится контактным (*j*+1)-ого дня в последующий момент времени, т.е.

  (17.11)

Аналогичный смысл имеют равенства

   (17.12)

   (17.13)

Число восприимчивых в последующий момент времени равно числу восприимчивых в предыдущий момент времени за вычетом новых контактных в этот момент времени плюс число незаразившихся контактных последнего дня в предыдущий момент времени:

  (17.14)

Число контактных в последующий момент времени равно числу контактных в предыдущий момент времени плюс число новых контактных в этот момент времени минус число контактных последнего дня в предыдущий момент времени, т.е. покинувших в данный момент группу контактных:

  (17.15)

Аналогичный смысл имеют равенства

   (17.16)

   (17.17)

Далее, число выздоровевших в последующий момент времени равно числу выздоровевших в предыдущий момент времени плюс все выздоровевшие больные последнего дня болезни в этот момент времени:

  (17.18)

Наконец, число умерших в последующий момент времени складывается из числа умерших в предыдущий момент времени и числа вновь умерших, т.е. критически больных последнего дня болезни в этот момент времени, которые умерли:

  (17.19)

Остается еще указать формулы для расчета числа контактных и различных форм больных первого дня в последующий момент времени. В частности, число контактных первого дня, т.е. вновь вступившие в контакт в последующий момент времени определяется по формуле

  (17.20)

где *βa*, *βi* – положительные константы, характеризующие заражаемость бессимптомными и легко больными. Число бессимптомных первого дня, т.е. вновь заболевших в последующий момент времени равно числу вышедших из контактной группы в предыдущий момент времени, которые заболели в бессимптомной форме, т.е.

  (17.21)

Число легко больных первого дня, т.е. вновь заболевших в последующий момент времени равно числу вышедших из контактной и бессимптомной групп в предыдущий момент времени, которые заболели в легкой форме, т.е.

  (17.22)

Аналогичный смысл имеют формулы

   (17.23)

Соотношения (17.10) – (17.23) с соответствующими начальными условиями составляют математическую модель рассматриваемого процесса и позволяют определить восемь функций состояния дискретного аргумента *k*, характеризующих меняющееся со временем число людей во всех рассматриваемых группах населения.

**Задание 17.4**. ***Дискретная модель эпидемиологии***. Провести расчеты в соответствии с формулами (17.10) – (17.23) при некоторых начальных условиях. Получить экспериментально положения равновесия системы. Интерпретировать полученные результаты.

#### **2. Метод потенциалов для решения транспортной задачи**

Вернемся к рассмотрению поставленной ранее транспортной задачи. Итак, имеется *m* число пунктов производства и *n* – число пунктов потребления. Требуется выбрать распределение *xij* единиц продукции, направляемой от *i-*ого производителя *j-*ому потребителю, считая известными, соответственно, все объемы производства



и все объемы потребления



так, что общие транспортные расходы



были минимальными, где *cij* – стоимость перевозки единицы продукции от *i-*ого потребителя *j-*ому потребителю.

Опишем один алгоритм решения транспортной задачи на одном конкретном примере. Предположим, что имеется три производителя и пять потребителей, т.е. *m=*3, *n=*5. Объемы производства характеризуются компонентами вектора **a**=(200,150,250), объемы потребления – компонентами вектора **b**=(100,80,90,150,180), а стоимости перевозок – матрицей



Решение задачи начинается с составления ***опорного*** ***плана перевозок***, который определяется в соответствии с ***методом минимального элемента***. Для этого выбирается минимальное из значений стоимости, что соответствует элементу *c*15=4. Тогда соответствующий (первый) производитель направляет соответствующему (пятому) производителю необходимую ему продукцию, т.е. на данном этапе исследования полагается *x*15=180, см. Таблица 17.3. Тем самым потребности пятого производителя полностью удовлетворены, а у первого производителя остается еще 20 единиц продукции.

Далее, из оставшихся элементов матрицы *C* выбирается наименьший элемент, т.е. *c*13=5. Соответствующий (первый) производитель направляет соответствующему (третьему) производителю всю имеющуюся у него продукцию, т.е. 20 единиц, т.е.полагаем *x*13=20. Тем самым первый производитель полностью распределил свою продукцию, а третьему потребителю еще предстоит получить 70 единиц продукции.

Мы вновь выбираем наименьший из оставшихся элементов матрицы *C*. Таковыми являются значения *c*14 и *c*22, равные 6. Однако первый производитель уже распределил свою продукции, вследствие чего выбираем второго производителя и второго потребителя. Таким образом, полагаем *x*22=80, что полностью удовлетворяет потребности второго потребителя, а у второго производителя остаются еще 70 единиц продукции.

Минимальными из оставшихся элементов матрицы *C* являются *c*25, *c*31 и *c*34, равные 7. Первое из них не подходит, поскольку пятый потребитель уже получает необходимый объем продукции. Из двух оставшихся элементов можно выбрать любой. Определяем *x*31=100, полностью удовлетворив тем самым первого потребителя, а у третьего производителя остается 150 единиц продукции. Теперь минимальным из оставшихся элементов матрицы *C* является *c*34. Вследствие этого выбираем *x*34=150, что удовлетворяет потребности четвертого потребителя и в точности равно оставшемуся объему продукции третьего производителя. В результате остается 70 единиц продукции у второго производителя, что соответствует потребностям третьего потребителя. Тем самым полагаем *x*23=70. Все остальные элементы матрицы *X* полагаем равным нулю. Соответствующий опорный план изображен в Таблице 17.3, где в каждой ячейке, соответствующей индексам *i* и *j*, в верхней строке находится значение *cij*, а в нижней строке – *xij*, если оно не равно нулю. Соответствующие опорному плану затраты равны *S =* 5·20+4·180+6·80+12·70+7·100+7·150= 3890.

Таблица 17.3. Опорный план для рассматриваемого примера.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **a** |
| **1** | 10 | 12 | 5**20** | 6 | 4**180** | **200** |
| **2** | 8 | 6**80** | 12**70** | 11 | 7 | **150** |
| **3** | 7**100** | 8 | 9 | 7**150** | 10 | **250** |
| **b** | **100** | **80** | **90** | **150** | **180** |  |

Уточнение опорного плана осуществляется в соответствии с ***методом потенциалов***. Каждому производителю и потребителю присваивается значение потенциала, соответственно, *ui* и *vj*. Для каждой из шести занятых ячеек предполагается выполнение равенств *ui* + *vj* = *cij*. Мы имеем шесть уравнений относительно восьми неизвестных. Следовательно, два из них выбираем произвольно. Полагаем *u*1 = 0. Тогда *v*3 = *c*13 – *u*1 = 5,
*v*5 = *c*15 – *u*1 = 4, *u*2 = *c*23 – *v*3 = 7, *v*2 = *c*22 – *u*2 = –1. Остаются еще равенства *u*3 + *v*1 = *c*31 = 7 и
*u*3 + *v*4 = *c*33 = 7. Выбирая *u*3 = 0, находим *v*1 = *v*4 = 7.

Для свободных ячеек вычисляем оценки в соответствии с формулами *sij* = *cij* – (*ui*+*vj*). Имеем *s*11 = 10–7=3, *s*12 = 12+1=13, *s*14 = 6–7=–1, *s*21 = 8–7+1=2, *s*24 = 11–7–7=–3, *s*25 = 7–7–4=–4, *s*32 = 8+1=9, *s*33 = 9–5=4, *s*35 = 10–4=6. Наименьшим здесь является значение *s*25 = –4. В этой связи изменение опорного плана осуществляется за счет переноса товара именно в эту ячейку. Обращаем внимание ей соответствует стоимость 7, в то время как занятой оказывается ячейка с существенно большей стоимостью 12. Перемещаем имеющиеся там 70 единиц продукции в рассматриваемую ячейку, т.е. полагаем *x*23 = 0, *x*25 = 70. Тогда для удовлетворения пятого потребителя первый потребитель отправляет ему на 70 единиц продукции меньше, т.е.
*x*15 = 110. Эти 70 единиц первый производитель переправляет третьему потребителю, удовлетворив его потребности. В результате находится *x*13 = 90. Результаты первой итерации представлены в Таблице 17.4. Теперь вычисляем стоимость перевозок *S =* 5·90+4·110+6·80+ 7·70+7·100+7·150 = 3610, в то время как для опорного варианта получалось значение 3890.

Таблица 17.4. Первая итерация для рассматриваемого примера.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **a** |
| **1** | 10 | 12 | 5**90** | 6 | 4**110** | **200** |
| **2** | 8 | 6**80** | 12 | 11 | 7**70** | **150** |
| **3** | 7**100** | 8 | 9 | 7**150** | 10 | **250** |
| **b** | **100** | **80** | **90** | **150** | **180** |  |

В соответствии с описанной методикой выполняем вторую итерацию. Для восьми потенциалов производителей и потребителей мы вновь имеем шесть уравнений *ui* + *vj* = *cij* для занятых ячеек. Выбираем два значения потенциалов потребителей *v*1 = 0 и *v*5 = 0. Тогда из имеющихся уравнений находим значения *u*1 = 4, *u*2 = 7, *u*3 = 7, *v*2 = –1, *v*3 = 1, *v*4 = 0. Для свободных ячеек согласно формуле *sij* = *cij* – (*ui*+*vj*) вычисляем значения *s*11 = 6, *s*12 = 9, *s*14 = 2, *s*21 = 1, *s*23 = 4, *s*24 = 4, *s*32 = 2, *s*33 = 1, *s*35 = 3. Поскольку все эти значения положительны, заключаем, что полученные результаты согласно первой итерации являются решением задачи.

#### **3. Планирование производства**

Транспортная задача относятся к линейному программированию, которое предполагает решение задачи минимизации некоторой линейной функции многих переменных при выполнении некоторого количества линейных ограничений в форме равенств и неравенств. Приведем пример еще одной задачи такого типа.

Имеется некоторое производство, выпускающее *m* видов продукции. Для их производства используются *n* видов ресурсов. Согласно технологии производства для производства одной единицы *i-*ой продукции требуется *aij* единиц *j*-ого ресурса. Запасы *j*-ого ресурса ограничены некоторой величиной *bj*. Стоимость одной единицы *i-*ой продукции равно *ci*. Ставится задача определения наиболее выгодного плана производства, т.е. такого количества *x*1, *x*2,…, *xm* единиц каждого вида продукции, которое доставляет максимум суммарной стоимости выпускаемой продукции.

Стоимость выпускаемой продукции вычисляется по формуле

 *S = c*1*x*1 + *c*2*x*2 + … + *cmxm*. (17.24)

Имеющиеся ограничения на запасы ресурсов характеризуются неравенствами

 *a*1*j x*1 + *a*2*j x*2 + … + *amj xm* ≤ *bj*, *j =* 1,2,…,*n.* (17.25)

Наконец, все значения *xi*должны быть неотрицательными, т.е. выполняются следующие условия

 *xi* ≥ 0, *i =* 1,2,…,*m*. (17.26)

Таким образом, задача ***планирования производства***[[18]](#endnote-18) состоит в отыскании таких целочисленных значений *x*1, *x*2,…, *xm*, которые удовлетворяют неравенствам (17.25), (17.26) и минимизируют функцию *S*, определяемую по формуле (17.24).

#### **4. Элементы теории игр**

В ***теории игр*** рассматривается процесс, в котором участвует две и более сторон[[19]](#endnote-19). Каждая из них преследует собственные интересы и реализует некоторую стратегию, ведущую к выигрышу или проигрышу в зависимости от совместных действий всех участвующих сторон. Игра в ***нормальной форме*** представляет собой множество игроков, каждый из которых имеет совокупность чистых стратегий *Si* и функцию платежей *Fi*,
*i =* 1,…,*m*, где *m* – число игроков. Исход игры **s**=(*s*1,…,*sm*), где *si*∈*Si*, *i =* 1,…,*m* представляет собой конкретный набор чистых стратегий всех игроков. Функция полезности *Fi* ставит в соответствие каждому исходу **s** некоторое число *Fi*(**s**).

В частности, для дилеммы заключенного *m=*2, множества *S*1 и*S*2 совпадают и состоят из двух элементов – 1, состоящее в отказе от сделки со следствием и 2, состоящее в согласии на сделку. Любая пара **s**=(*i*,*j*) соответствует конкретному исходу, *i*,*j=*1,2. Функции полезности при этом можно описать с помощью Таблицы 17.5. Здесь верхняя строка соответствует множеству чистых стратегий первого игрока, а левый столбец – множеству чистых стратегий второго игрока. При этом в клетке, соответствующей паре (*i*,*j*), находится соответствующая пара значений функций полезности *F*1(*i*,*j*), *F*2(*i*,*j*).

Таблица 17.5. Функции полезности.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** |
| **1** | 1, 1 | 10, 0 |
| **2** | 0,10 | 3, 3 |

При выборе стратегий каждый игрок руководствуется своими интересами. При этом ключевым является понятие ***доминирование стратегий***. В частности, стратегия *si* *i*-ого игрока доминирует его стратегию , если при произвольном выборе стратегий остальных игроков значение функции полезности при выборе стратегии *si* оказывается не меньше, чем при выборе . Обозначим через **s** исход, включающий в себя стратегию *i*-ого игрока *si*, а через **s'** – исход, получающийся из **s** путем замены стратегии *si* на . Таким образом, доминирование стратегии предполагает выполнение неравенства *Fi*(**s**)≤*Fi*(**s'**) для всех возможных исходов **s'**. Доминирование является строгим, если при всех возможных исходах в последнем соотношении выполняется строгое неравенство. В противном случае доминирование является слабым. Если все игроки имеют строго доминирующие стратегии, то соответствующий исход является ***равновесием Нэшу***[[20]](#endnote-20). В частности, для дилеммы заключенного речь идет о минимизации функций полезности, а строго доминирующими будут стратегии 2 обоих игроков. Равновесию Нэша соответствует исход (2,2), для которого обе функции полезности принимают значение 3.

Равновесие Нэша может не соответствовать наилучшему значению всех функций полезности. В частности, в дилемме заключенному исход (1,1) соответствует значениям 1 функций полезности. Но определяющие его стратегии не являются доминирующими для обоих игроков. Этот исход, реализуется лишь при согласованном выборе их обоих. Исход **s** является ***оптимальным по Парето***, если не существует такого исхода **s'**, что выполняется неравенство *Fi*(**s'**)<*Fi*(**s**) для всех *i.*

**Задание 17.5**. Рассмотрим обобщенную версию игры, рассмотренной в Разделе 5. Имеются три фирмы, выпускающие один и тот же товар. Каждая из фирм может назначить два варианта цен – низкие или высокие, которые соответствуют значениям 1 и 2. Спрос на товар тем больше, чем меньше уровень цен. В частности, если все фирмы назначают низкие цены, то каждая из них продаст по 10 единиц товара. Если две фирмы назначают низкие цены, а третья – высокие, то первые две фирмы продают по 13 единиц товара, а третья фирма ничего не продает. Если одна фирма назначает низкие цены, а две остальные – высокие, то первая продаст 16 единиц продукции, а две остальные – по 2. Наконец, если все фирмы назначают высокие цены, то каждая из них продает по 6 единиц продукции. Найти исходы, соответствующие равновесию Нэша и оптимальности по Парето.

**Литература**

Исследование операций

Taha H. Operations Research: An Introduction. Pearson, 2016.

Hillier F.S. and Lieberman, G.J. Introduction to Operations Research, McGraw-Hill: Boston MA; 10th Edition, 2014.

Хаос

Moon S.C. Chaotic and Fractal Dynamics: Introduction for Applied Scientists and Engineers. John Wiley and Sons, 2008

Alligood, K.T. Sauer, T. Yorke, J.A. Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. Springer-Verlag, 1997

Целочисленная оптимизация:

Papadimitriou C.H., Steiglitz K. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity. Dover Publ., 1998.

Schrijver, Alexander, Combinatorial Optimization, Berlin, New York: Springer, 2003

Cook, W.  In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation. Princeton University Press. 2012.

**Ссылки из предшествующих глав**

**Глава 5.** Устойчивость. В Главе 17 будут рассмотрены вопросы устойчивости положения равновесия одной дискретной системы.

**Глава 7**. Модель Мальтуса. В Главе 17 будут рассмотрен дискретный аналог модели Мальтуса.

**Глава 7**. Модель Ферхюльста. В Главе 17 будут рассмотрен дискретный аналог модели Ферхюльста. Интересно, что при определенных условиях дискретная модель Ферхюльста обладает качественно иными свойствами, в частности, описывать хаотическое поведение системы.

**Глава 7**. Модель эпидемиологии. В Главе 17 будут рассмотрена одна дискретная модель эпидемиологии.

**Глава 8**. Некоторые дискретные модели экономики рассматриваются в Главе 17.

**Глава 9**. Некоторые дискретные модели социологии рассматриваются в Главе 17.

**Глава 10**. Уравнение теплопроводности. Дискретная модель теплопереноса рассматривается в Главе 17.

**Глава 11**. Метод прогонки. В Главе 17 будет показано, что разностный аналог уравнения теплопроводности в стационарном случае имеет прямой физический смысл, будучи дискретной моделью рассматриваемой системы. В частности, для численного анализа этой системы можно воспользоваться методом прогонки.

**Глава 13**. Стационарный теплоперенос. Дискретная модель стационарного теплопереноса приводится в Главе 17.

**Глава 16**. Задачи на экстремум. Задачи на экстремум рассматриваются также в Главе 17.

### **КОММЕНТАРИИ**

1. Многочисленные дискретные модели рассматриваются, например, в Banerjee, Gershenfeld, Moghadas, Mooney. [↑](#endnote-ref-1)
2. Об исследовании операций см. Hillier, Taha. [↑](#endnote-ref-2)
3. О дискретной математике см. Biggs, Johnsonbaugh, Yablonsky. [↑](#endnote-ref-3)
4. Дискретные биологические модели рассматриваются, например, в Bratus, Edelstein, Muller, Segel. [↑](#endnote-ref-4)
5. Проблема сходимости последовательностей является одной из центральных в математическом анализе, см., например, Apostol, Telyak, Trench. [↑](#endnote-ref-5)
6. Это происходит примерно при *r=*3.56995. [↑](#endnote-ref-6)
7. Математическая теория хаоса рассматривается, например, в Alligood, Moon. [↑](#endnote-ref-7)
8. При необходимости можно разбивать область и на неравные части. [↑](#endnote-ref-8)
9. Выражения  представляют собой разностные аналоги производной. Они широко применяются в вычислительной математике (в частности, в методе конечных разностей, см. …) и называются, соответственно, «разностью вперед» и «разностью назад». [↑](#endnote-ref-9)
10. В основе как непрерывной, так и дискретной математической модели теплопереноса лежат соотношения (17.4), (17.5), являющиеся, по сути, разностными, а не дифференциальными. Отметим, что ранее мы сначала переходили в них к пределу для получения модели в форме дифференциальных уравнений, а потом проводили дискретизацию этих уравнений для получения практического результата. В этом смысле, возможно, более логичным оказывается использование дискретной модели, для получения которой не требуется ни предельный переход, ни аппроксимация производных. [↑](#endnote-ref-10)
11. Транспортная задача рассматривается в Papadimitriou, Schrijver. Она относится к ***линейному программированию***, поскольку как минимизируемая величина, так и все имеющиеся ограничения являются линейными. С другой стороны, транспортная задача относится к ***целочисленному программированию***, поскольку ее решением является вектор, компоненты которого принимают исключительно целочисленные значения. В принципе, решения таких задач можно найти простым перебором возможных вариантов, но, как правило, это неэффективно, поскольку требует значительных вычислительных затрат. Общие вопросы комбинаторики рассматриваются, например, в van Lint, Riordan. [↑](#endnote-ref-11)
12. О задаче коммивояжера, см. Cook. [↑](#endnote-ref-12)
13. О теории графов см. Bondy, Deo, Kepner. [↑](#endnote-ref-13)
14. Соответствующие неравенства приводятся, например, в Cook. [↑](#endnote-ref-14)
15. Однако достаточно просто оценить в каких пределах лежит минимальное значение критерия оптимальности маршрута. В частности, самый выгодный переход из *i-*ого города соответствует минимальному из значения *cij* по всем значениям *j=*1,…,*n*. Таким образом, самый выгодный маршрут коммивояжера никак не может стоить меньше суммы всех этих значений. Аналогично можно выбрать самый выгодный из вариантов перехода в *j*-ый город, т.е. минимальному из значения *cij* по всем значениям *i=*1,…,*n*, а затем просуммировать все полученные значения. Естественно решение задачи не может дать значения критерия оптимальности ниже этого результата. Для получения оценки сверху достаточно выбрать маршрут произвольным образом и найти соответствующее ему значение критерия оптимальности. [↑](#endnote-ref-15)
16. По поводу алгоритмов решения задачи коммивояжера, см. Cook, Papadimitriou, Schrijver. [↑](#endnote-ref-16)
17. О теории игр см. Fernandez, Isaacs, Osborne. [↑](#endnote-ref-17)
18. Методы решения задач планирование производства, см. Hillier, Taha. [↑](#endnote-ref-18)
19. Многочисленные примеры применения теории игр в экономике приводятся в Aubin, Ekeland, Gidrovich, Kolemaev, Neumann. Она применяется также в социологии Marchi, Buchler, биологии ClarkC, военном деле Andrews и др. [↑](#endnote-ref-19)
20. Решение игровой задачи часто сводится к последовательному исключению доминируемых стратегий. Если удастся удалить все строго доминируемые стратегии, то в результате получается единственное равновесие Нэша. Удаление всех слабо доминируемых стратегий также приводит к равновесию Нэша, но оно может оказаться неединственным.

 [↑](#endnote-ref-20)